BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique
Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Énergétique

Génie Civil

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques et une feuille de papier millimétré sont distribués en même temps que le sujet.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice I (4 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1°) a) Déterminer sous forme algébrique le nombre complexe z_1, vérifiant :

$$z_1(1+\mathrm{i})+3+\mathrm{i}=0.$$

b) Déterminer sous forme algébrique les nombres complexes z_2 et z_3 vérifiant le système :

$$\begin{cases} 2z_2+z_3=5 \\ z_2+3z_3=-10\mathrm{i}. \end{cases}$$

2°) Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $z_A=3+2\mathrm{i}$, $z_B=-1-4\mathrm{i}$ et $z_C=-2+\mathrm{i}$.

a) Placer ces trois points dans le plan complexe.

b) Calculer les longueurs AB, BC et CA.

c) En déduire la nature du triangle ABC, puis calculer son aire.

Exercice II (5 points)

Le Comité des fêtes d'un village organise une loterie à l'aide de deux urnes.

L'urne U_1 contient trois boules rouges notées R_1, R_2, R_3 et deux boules jaunes notées J_1 et J_2.

L'urne U_2 contient quatre boules bleues notées B_1, B_2, B_3, B_4 et une boule verte V.

Pour participer à cette loterie, un joueur doit d'abord miser 3 €. Il tire ensuite au hasard une boule dans U_1, puis une boule dans U_2. Les boules sont indiscernables au toucher. On suppose que tous les tirages de couples de boules sont équiprobables.

1°) Á l'aide d'un tableau ou d'un arbre montrer qu'il y a 25 couples de boules possibles.

2°) Une boule rouge fait gagner 2 €. Une boule jaune fait gagner 3 €. Une boule bleue fait gagner 1 €. La boule verte fait gagner 5 €.
Á chaque tirage de 2 boules la variable aléatoire X associe le gain finalement réalisé par le joueur. Ainsi, en tenant compte de la mise de 3 €, le tirage d'une boule rouge et d'une boule verte occasionne finalement un gain de 4 €.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Démontrer que $P(X=5)=\dfrac{2}{25}$.

c) Présenter en tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

d) Quelle est la probabilité que le gain du joueur ne dépasse pas finalement 1 € ?

3°) a) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

b) Le Comité s'aperçoit que son jeu est déficitaire.
Expliquer quelle est, en nombre entier d'euros, la mise minimale qu'il faudrait demander afin de rendre le jeu favorable au Comité.

Problème (11 points)

L'objectif est de déterminer une fonction dont la représentation graphique est donnée sur la page annexe à joindre à la copie, puis d'étudier certaines propriétés de cette fonction.

Partie A

Sur la page annexe, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm, la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points de coordonnées $A\,(0\,;\,4)$ et $B\,(-1,5\,;\,1)$.

1°) Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f(-1,5)$.

2°) On suppose que pour tout nombre réel x, $f(x)$ s'écrit sous la forme suivante :
$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} + 1$, où a et b sont 2 nombres réels.
Utiliser les résultats de la question 1. pour déterminer la valeur des nombres réels a et b.

Partie B

Dans toute la suite du problème on étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} + 1$.

1°) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2°) a) Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x} + 1$.

b) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.
En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ a une asymptote (D) dont on donnera une équation.

c) Démontrer que cette asymptote (D) coupe la courbe $\mathscr{C}$ au point B.

d) Étudier, en le justifiant soigneusement, la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (D).

3°) Prouver que la dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x par :

$$f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

4°) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

5°) Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

Partie C

1°) On rappelle que, sur la feuille annexe jointe, **à rendre avec la copie**, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point E d'abscisse $(-0,5)$.
Tracer sur la feuille annexe la tangente Δ.
Compléter cette figure en représentant l'asymptote (D) et la tangente (T).
Hachurer la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

2°) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (-2x - 5)\mathrm{e}^{-x} + x$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3°) Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur arrondie au centième.

Annexe du problème à rendre avec la copie